Corentin Bergeron ENS Rennes

Formule de Stirling par le TCL

Développement un peu fun qui démontre l'équivalent de Sterling via l'utilisation d'un TCL et d'une interversion limite/espérance subtile. Parfait pour ceux qui ne savent pas comment remplir leurs leçons de proba sans mettre le théorème de Levy ou la preuve du TCL (on dort).

Côté recasage, les probas sont au rendez-vous avec les leçons 261, 262 et 266. La leçon 264 peut s'entendre, puisqu'on utilise des lois de Poisson. En dehors des probas, la leçon 235 convient très bien. Je suis beaucoup plus dubitatif pour les leçons 223 et 224.

I - Le développement

Théorème 1 *Formule de Stirling*

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Preuve :

Soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - 1)$.

Étape 1 : Calcul d'une espérance

La variable aléatoire $Z_n^- est dans [0, \sqrt{n}]$ donc admet une espérance (bornée).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n^-) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right)^-\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\right)^- = k\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n = -k\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n - k\right).
\end{aligned}$$

Mais $\sum_{i=1}^n X_i \underset{\text{loi}}{\sim} \mathscr{P}(n)$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n^-] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} k\, e^{-n} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} & \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, e^{-n} \frac{n^k}{k!} \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(n \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} k \frac{n^k}{k!} \right) \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{(k-1)!} \right) \\ &= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(\frac{n^{n+1}}{n!} \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e} \right)^n.\end{aligned}$$

Étape 2 : Un lemme utilie

Soit $A > 0$.

$\star$ Si $x \leq A$, $x - \min\!\big(x, A\big) = 0$ donc $0 \leq x - \min\!\big(x, A\big) \leq \dfrac{x^2}{A}$.

$\star$ Si $x > A$, $x - \min\!\big(x, A\big) = x - A \geq 0$ et $x - A < x\dfrac{x}{A} = \dfrac{x^2}{A}$.

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq x - \min\!\big(x, A\big) \leq \frac{x^2}{A}.$$

Par linéarité de l'espérance, si X est une v.a. admettant un moment d'ordre 2 :

$$0 \leq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\min\!\big(X, A\big)] \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{A}.$$

Étape 3 : Utilisation du TCL

Par le TCL,

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

i.e.

$$\mathbb{E}[\Phi(Z_n)] \to \mathbb{E}[\Phi(Z)], \quad \forall \Phi \in \mathcal{C}_b.$$

Pour $A > 0$, on applique à $x \mapsto x \wedge A$ (continue et bornée).

$$\mathbb{E}[Z_n^- \wedge A] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Z^- \wedge A].$$

Or

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[Z_n^-] - \mathbb{E}[Z^-]| &\leq |\mathbb{E}[Z_n^-] - \mathbb{E}[Z_n^- \wedge A]| + |\mathbb{E}[Z_n^- \wedge A] - \mathbb{E}[Z^- \wedge A]| + |\mathbb{E}[Z^- \wedge A] - \mathbb{E}[Z^-]| \\ &\leq \frac{1}{A} + |\mathbb{E}[Z_n^- \wedge A] - \mathbb{E}[Z^- \wedge A]| + \frac{1}{A}.\end{aligned}$$

D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[Z_n^-] - \mathbb{E}[Z^-]| \leq \frac{2}{A}$$

et donc puisque c'est vrai pour A quelconque,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n^-] = \mathbb{E}[Z^-].$$

Étape 4 : Celcul de la constante

On voudrait maintenant calculer $\mathbb{E}[Z^-]$. Pour cela, appliquons le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z^-] &= -\int_{-\infty}^{+\infty} (x \wedge 0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} x\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$



II - Remarques

1 - Ce développement n'a aucun intérêt en lui-même, mais on peut le voir comme une application rigolotte du TCL. Outre quelques techniques intéressantes, ce développement est juste du ''fun" (si on peut appeler 'fun' des probas xD) vous avez le droit de vous amusez, et ne pas faire que des trucs sérieux.

2 - Pour la leçons 235, insistez sur l'étape 2 et 3 : ce qu'on veut faire à la fin est bien d'inverser limite et espérance. De même, suivant la leçon de proba, insistez bien sur les éléments qui permettent le recasage.

3 - C'est un développement un peu calculatoire, donc il faut bien maitriser les calculs et les travailler un minimum, au risque de se perdre le jour J.

III - Références

[131] : *131 développements pour l'oral*, Didier Lesesvre, Pierre Montagnon